ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΚΑΤΑ CAUCHY

Άσκηση 1.

ΝΔΟ αν $0<a<\theta<\beta<\frac{\pi}{2}$, τότε $\frac{\sin a-\sin\beta}{\cos\beta-\cos a}=ctg\theta$.

ΛΥΣΗ

Έστω $f(x)=\sin x$ και $g(x)=\cos x$

όπου f,g συνεχείς στο $[a,\beta]$ και παραγωγίσιμες στο (a,β) ως τριγωνομετρικές.

Επίσης, $g'(x)=-\sin x\neq 0$, $\forall x\in(a,\beta)$

Άρα, από το ΘΜΤ cauchy έχουμε ότι

$$\frac{f(\beta)-f(a)}{g(\beta)-g(a)}=\frac{f'(\theta)}{g'(\theta)},\quad a<\theta<\beta \Rightarrow \frac{\sin\beta-\sin a}{\cos\beta-\cos a}=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin a-\sin\beta}{\cos\beta-\cos a}=ctg\theta,\quad \theta\in(a,\beta).$$

Άσκηση 2

Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=x^3$ και $g(x)=x^2$, $x\in[-1,3]$

Να εξετάσετε εάν $\exists\,\xi\in(-1,3)$ τέτοιο ώστε:

$\frac{f(3)-f(-1)}{g(3)-g(-1)}=\frac{3\xi^2}{2\xi}$ και στη συνέχεια να βρείτε το ξ

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι το ΘΜΤ cauchy δεν εφαρμόζεται στο $[-1,3]$ διότι (παρόλο που f,g συνεχ. $[-1,3]$ & f,g παραγ. $(-1,3)$) οι f' και g' μηδενίζονται για $x=0$.

Ωστόσο, το συμπέρασμα του ΘΜΤ cauchy ισχύει (δηλ. $\exists\,\xi\in(-1,3)$ ώστε $\frac{f(3)-f(-1)}{g(3)-g(-1)}=\frac{3\xi^2}{2\xi}\Rightarrow \xi=\frac{7}{3}\in(-1,3)$)

Συμπέρασμα: Στο ΘΜΤ cauchy οι συνθήκες για την ύπαρξη του ξ είναι ικανές και όχι αναγκαίες.